平成25年度
東京大学大学院総合文化研究科
広域科学専攻修士課程入学試験問題

相関基礎科学系　専門科目

（ 平成24年８月28日　15:15～18:15 ）

試験開始の合図があるまで問題冊子を開いてはいけません。開始の合図があるまで、下記の注意事項をよく読んでください。

1．本冊子は、相関基礎科学系を志望する受験者のためのものである。

2．本冊子の本文は22ページである。落丁、乱丁又は印刷不鮮明の箇所があった場合には、手を挙げて申し出ること。

3．第１問～第14問から３問を選択して解答すること。

4．配付された３枚の解答用紙（両面使用可）は、問題ごとに１枚を使用すること。

5．解答用紙の上の欄に、解答した問題の番号、科目名、氏名及び受験番号を、次の記入例のように記入すること。なお、氏名、受験番号を記入していない答案は無効である。

記入例

問題番号	科目名	氏名	受験番号
第７問	化学（２）	○○○○	No.○○○○

6．特に指定がない限り日本語または英語で解答すること。

7．本冊子の最後の３枚は草稿用紙である。切り離して使用してもよい。

8．試験の開始後は、中途退場を認めない。

9．本冊子、解答用紙及び草稿用紙は持ち帰ってはならない。

10．次の欄に受験番号と氏名を記入せよ。

受験番号	
氏名	

相関基礎科学系　専門科目

目　次

平成25年度 修士課程入学試験問題
相関基礎科学系　　専門科目

第1問　数学

以下の I, II, III 全てに解答せよ.

I. 次の行列 M について以下の問に答えよ.

$$M = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(1) M の固有値 を求めよ.

(2) 適当な可逆行列 P と数 a, b, c を用いると，等式

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

が成立する．その様な P, a, b, c を求めよ.

(3) 自然数 n に対して M^n を求めよ.

II. 正の実数 s に対し，ガンマ関数 $\Gamma(s)$ は $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}\exp(-x)dx$ により定義される.

(1) 正の実数 a に対し，積分 $\int_0^\infty \exp(-x^a)dx$ をガンマ関数を用いて表せ.

(2) 積分 $J = \int_0^\infty \exp(ix^4)dx$ をガンマ関数を用いて表せ．導出も示すこと.

III. 正方行列 X の指数関数 $\exp(X)$ は以下の様に定義される.

$$\exp(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}.$$

以下では A, B は正方行列とし，$[A, B] = AB - BA$ と定義する.

(1) 変数 λ に対し，$g(\lambda) = \exp(\lambda A)B\exp(-\lambda A)$ と定義する．λ についてのベキ級数展開

$$g(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n C_n$$

における係数行列 C_0, C_1, C_2 を A, B を用いて表せ.

(2) $[A, [A, B]] = 0$ が成り立つ場合，次の等式を証明せよ.

$$\exp(A)B\exp(-A) = B + [A, B].$$

(3) $[A, [A, B]] = 0$ かつ $[B, [A, B]] = 0$ が成り立つ場合，次の等式を証明せよ.

$$\exp(A)\exp(B) = \exp\Big([A, B]\Big)\exp(B)\exp(A).$$

平成25年度 修士課程入学試験問題
相関基礎科学系　専門科目

第2問　物理学 (1)　(その1)

時間 t に陽に依らない電磁場中の、電荷 e、質量 m を持った荷電粒子の運動を、古典論および量子論で考察する。(以下ではSI単位系を用い、真空の誘電率を ϵ_0 で、また真空の透磁率を μ_0 で表すものとする。)

まず、原点に固定された点電荷 (電荷 e') が作る電場中での運動を考える。

(1) 荷電粒子の位置ベクトルを $\vec{x}$ で表すとき、古典的な運動方程式を書け。また、それを用いて、角運動量 $\vec{l} = \vec{x} \times \vec{p}$ の各成分 l_i $(i = 1, 2, 3)$ が保存することを示せ。但し $\vec{p}$ は運動量ベクトルを表す。

(2) 量子力学的には、この保存則はどのように表されるか。具体的な計算により、l_i が保存することを示せ。

次に、磁場中の運動を考える。ベクトルポテンシャルを $\vec{A}(\vec{x})$ と記すと、ラグランジアンは次のように書ける：

$$(\star 1) \qquad L = \frac{1}{2} m \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right)^2 + e\vec{A}(\vec{x}) \cdot \frac{d\vec{x}}{dt}.$$

(3) ラグランジアン $(\star 1)$ は $\vec{A}$ を陽に含んでいるので、任意関数 $\Lambda(\vec{x})$ によるゲージ変換 $\vec{A} \to \vec{A} + \nabla\Lambda(\vec{x})$ のもとで、別の形 L' に変更される。にも関わらず、L と L' は同じ物理を記述することを古典論の範囲で説明せよ。

(4) ハミルトニアン H が次の形で与えられることを示せ。

$$(\star 2) \qquad H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - e\vec{A}(\vec{x}) \right)^2.$$

次に、まだ見つかっていないが、点電荷の磁気的対応物である「単磁極」が存在すると仮定し、それが原点に固定されているときに生ずる球対称な磁束密度

$$(\star 3) \qquad \vec{B} = \frac{\mu_0 g}{4\pi} \frac{\vec{x}}{r^3}$$

のもとでの荷電粒子の運動を考える (下の [注] を参照)。ここで $r \equiv |\vec{x}|$ であり、g は磁荷を表す。

(5) 荷電粒子の従う古典的な運動方程式を書け。また、それをもとにして、$\vec{l} = \vec{x} \times \vec{p}$ で定義される通常の角運動量は保存しないが、$\vec{l}$ に余分な角運動量

$$\vec{s} \equiv -\frac{\mu_0 e g}{4\pi} \frac{\vec{x}}{r}$$

を加えた $\vec{j} \equiv \vec{l} + \vec{s}$ が保存することを示せ。(必要ならば、ベクトルの外積に関する次の公式を用いて良い。$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$.)

[注]　この磁束密度を $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ のようにベクトルポテンシャルを用いて表すと、$\vec{A}$ は特異点を持つことが知られているが、以下の考察ではこの点は考慮しなくてよい。

第2問　物理学 (1)　(その2)

(6) 次に、量子力学的な考察を行う。($\star$2) のハミルトニアンの形から推測すると、保存する角運動量演算子の候補として

$$\vec{L} = \vec{x} \times \left(\vec{p} - e\vec{A}(\vec{x})\right)$$

が考えられるが、実はこれは正しくない。成分 L_i の間の交換関係 $[L_1, L_2]$ 等を具体的に計算することにより、L_i が角運動量演算子が満たすべき交換関係とは異なる交換関係を持つことを示せ。

(7) 問 (5) の古典論の結果および問 (6) の結果を参考にして、単磁極の作る磁束密度 ($\star$3) 中で、正しい交換関係を満たす角運動量演算子 $\vec{J}$ を構成せよ。

(8) 問 (7) で構成した角運動量 $\vec{J}$ の大きさ J が、不等式

$$J \geq \left(\sqrt{\left(\frac{eg\mu_0}{4\pi\hbar}\right)^2 + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\right)\hbar$$

を 満たすことを示せ。(ここで $\hbar = h/2\pi$、h はプランク定数である。)

平成25年度 修士課程入学試験問題
相関基礎科学系　　専門科目

第3問　物理学 (2)　(その1)

我々の身の周りにある磁石は十分に熱すると、ある温度より高温では磁力を失う。この現象は強磁性相転移と呼ばれ、相転移現象の典型例の一つである。以下では強磁性相転移を簡単な統計力学モデルを用いて考察する。

磁気モーメントの大きさが μS である磁性原子が N 個の格子点上に一つずつある。ここで、μ は磁気モーメントの単位であり、S は整数または半整数をとる。カノニカル集団の方法を用いて、この系が温度 T の熱平衡状態にある場合を考える。ボルツマン定数を k_{B} として、以下の問いに答えよ。

I. まず、磁気モーメント間に相互作用がない状況を考える。この系に一様な外部磁場 $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ をかけたとき、系のエネルギー E_1 は、m_i を i 番目 $(i = 1, \cdots, N)$ の磁性原子のとる磁気量子数として、

$$E_1 = -\mu B \sum_{i=1}^{N} m_i \qquad (\star)$$

と表される。ただし、各磁気量子数 m_i は、$m_i = -S, -S+1, \cdots, S-1, S$ の値をとる。以下では、この系を系1とよぶ。

(1) 十分高温と十分低温における系1の振る舞いの特徴を述べよ。

(2) 系1の分配関数 $Z_1(T, B)$ を T と B の関数として求めよ。

(3) 系1の平均磁気モーメント $M_1(T, B) = \dfrac{\mu}{N} \sum_{i}^{N} \langle m_i \rangle_1$ を T と B の関数として求めよ。$\langle \cdots \rangle_1$ は系1の統計力学的期待値

$$\langle \cdots \rangle_1 = \sum_{\{m_i\}} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{E_1}{k_{\mathrm{B}} T}}}{Z_1} \cdots$$

を表す。

(4) 磁場の大きさ B が有限のとき、平均磁気モーメント M_1 の温度依存性の概略を図示し、その結果に基づき、系1は相転移を起こさないことを説明せよ。

II. 次に、外部磁場の大きさをゼロとして、磁気モーメント間の相互作用を考える。系のエネルギー E_2 は、系1の磁気量子数 m_i と正の相互作用定数 J を用いて、

$$E_2 = -J \sum_{(i,j)} m_i m_j$$

で与えられるとする。ここで和 (i, j) は隣接する格子点についてとり、どの格子点も隣接する格子点数は z とする。以下では、この系を系2とよぶ。相互作用のある系を正確に取り扱うことは一般には難しいため、ここでは平均場近似と呼ばれる近似法を用いて、系2の熱力学的性質を調べる。

(次のページに続く)

第 3 問　物理学 (2)　(その 2)

(前ページから続く)

II. (1) 系 2 に対する平均場近似を系 1 を用いて考察する。ただし、系 1 のエネルギーは、式 ($\star$) の外部磁場の大きさ B を変数 λ としたエネルギー

$$E_1 = -\mu\lambda \sum_i^N m_i$$

とする。変数 λ は各格子点に作用する平均的な磁場 (有効磁場) とみなせる。系 1 と系 2 のヘルムホルツの自由エネルギーをそれぞれ F_1、F_2 とすると、恒等式

$$\mathrm{e}^{-\frac{1}{k_\mathrm{B}T}(F_2 - F_1)} = \left\langle \mathrm{e}^{-\frac{1}{k_\mathrm{B}T}(E_2 - E_1)} \right\rangle_1 .$$

が成り立つことを示せ。

(2) 指数関数の性質として、任意の実数 x について $\mathrm{e}^x \geq 1 + x$ が成り立つことから、問 II. (1) の恒等式を用いて、不等式

$$F_2 \leq F_1 + \langle E_2 - E_1 \rangle_1$$

が成り立つことを示せ。

(3) $F_{\mathrm{MF}}(\lambda) = F_1 + \langle E_2 - E_1 \rangle_1$ と定義すると、問 II. (2) の不等式より系 2 の自由エネルギー F_2 は、

$$F_2 \leq F_{\mathrm{MF}}(\lambda)$$

を満たすことがわかる。$M_1(\lambda)$ を有効磁場 λ のもとでの系 1 の平均磁気モーメントとして、$F_{\mathrm{MF}}(\lambda)$ を M_1 と F_1 などを用いて表せ。

(4) 問 II. (3) の結果は、変数 λ についての $F_{\mathrm{MF}}(\lambda)$ の最小値が系 2 の自由エネルギーの最も良い近似を与えることを示している。$F_{\mathrm{MF}}(\lambda)$ の最小値を与える λ の候補を求めるために、$F_{\mathrm{MF}}(\lambda)$ の極値条件から変数 λ の満たす方程式を求めよ。

(5) $F_{\mathrm{MF}}(\lambda)$ の極値条件を満たす λ を λ^* とすると、ある温度 T_c 以上では $\lambda^* = 0$ のみが極値となり、T_c 以下では有限の $\lambda^* \neq 0$ が存在し、それが $F_{\mathrm{MF}}(\lambda)$ の最小値であることを示すことができる。温度 T_c は平均場近似での強磁性相転移温度を意味するが、この T_c を求めよ。また、この結果からわかる範囲で、強磁性相転移をより高温で起こすための物質の性質を述べよ。

平成25年度修士課程入学試験問題

相関基礎科学系　　専門科目

第4問　物理学（3）（その1）

誘電体中を高速の荷電粒子が通過するとき、その速さが誘電体中の光の位相速度を超えると、チェレンコフ光と呼ばれるコヒーレントな光が放出される。ここでは簡単化した模型を用いてこの現象を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 誘電体中では電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ が存在すると分極密度 $\mathbf{P}(\mathbf{r},t)$ が生じ、その空間的非一様性から分極電荷密度 $\rho_{\mathrm{m}}(\mathbf{r},t) = -\nabla\cdot\mathbf{P}$ が、また、時間依存性から分極電流密度 $\mathbf{j}_{\mathrm{m}}(\mathbf{r},t) = \partial\mathbf{P}/\partial t$ が現われる。誘電体の等方性を仮定して、真空の誘電率 ϵ_0 と誘電体の分極率 α を用いて $\mathbf{P} = \epsilon_0\alpha\mathbf{E}$ と表わす。マクスウェル方程式、

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \qquad \nabla\cdot\mathbf{B} = 0,$$

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t},$$

から、電荷密度 ρ や電流密度 $\mathbf{j}$ が全て誘電体の分極に起因するとき、誘電体中を伝わる電磁波を記述する電場の波動方程式を導け。但し、$\mathbf{B}$ は磁束密度、μ_0 は真空の透磁率を表わし、誘電体の磁化は無視でき、α は一定とする。必要であれば、ベクトル場 $\mathbf{F}(\mathbf{r},t)$ に関する公式、$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{F}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{F}) - \nabla^2\mathbf{F}$ を用いよ。

(2) 前問 (1) で求めた波動方程式から、誘電体中の光の位相速度 c_{m} を真空中の光速 c と誘電体の分極率 α を用いて表わせ。

次に、この誘電体中を z 軸方向に速さ v で通過する電荷 q をもつ荷電粒子を考える。この荷電粒子のつくる電荷密度と電流密度は、デルタ関数を用いて、それぞれ、

$$\rho_{\mathrm{ext.}}(\mathbf{r},t) = q\delta(x)\delta(y)\delta(z-vt), \qquad \mathbf{j}_{\mathrm{ext.}}(\mathbf{r},t) = q\mathbf{v}\delta(x)\delta(y)\delta(z-vt),$$

と表わされる。ここで、$\mathbf{r} = (x,y,z)$ と記した。

(3) 磁場と電場を、それぞれ、ベクトル・ポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ とスカラー・ポテンシャル $\phi(\mathbf{r},t)$ を用いて、$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$、$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$ と表わすと、$\mathbf{A}$ と ϕ の取り方には、任意のスカラー関数 $\Lambda(\mathbf{r},t)$ を用いた「ゲージ変換」、$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda$ と $\phi' = \phi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t}$、に対する任意性がある。この任意性を用いて、マクスウェル方程式を ϕ と $\mathbf{A}$ に関する2つの独立な偏微分方程式、

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{c_{\mathrm{m}}^2\partial t^2}\right)\phi = -\frac{\rho_{\mathrm{ext.}}(\mathbf{r},t)}{\epsilon}, \qquad \left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{c_{\mathrm{m}}^2\partial t^2}\right)\mathbf{A} = -\mu\mathbf{j}_{\mathrm{ext.}}(\mathbf{r},t),$$

に書き直すことができる。そのとき ϕ と $\mathbf{A}$ のみたす関係（ゲージ条件）を求め、ϵ と μ を ϵ_0, μ_0, α を用いて表せ。

平成 25 年度修士課程入学試験問題

相関基礎科学系　　専門科目

第 4 問　物理学 (3)（その 2）

(4) 前問 (3) で求めた $\phi(\mathbf{r},t)$ と $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ の従う波動方程式は、それぞれのポテンシャルの時間についてのフーリエ変換

$$\phi_\omega(\mathbf{r}) = \int dte^{i\omega t}\phi(\mathbf{r},t), \qquad \mathbf{A}_\omega(\mathbf{r}) = \int dte^{i\omega t}\mathbf{A}(\mathbf{r},t),$$

を行うと、どちらもヘルムホルツ型の偏微分方程式

$$(\nabla^2 + k^2)\psi(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}), \qquad k = |\omega|/c_\mathrm{m} \qquad (*)$$

に変換できる。$\phi_\omega(\mathbf{r})$ と $\mathbf{A}_\omega(\mathbf{r})$ の各成分に対する非斉次項 $f(\mathbf{r})$ を求めよ。

(5) 微分方程式 $(*)$ の外向き進行波に対応する解は、

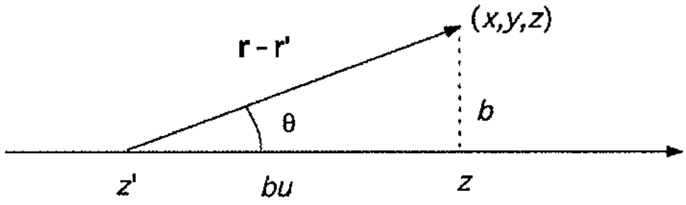
$$\psi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int d\mathbf{r}'\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}f(\mathbf{r}')$$

で与えられる。ここで、$\mathbf{r}' = (x',y',z')$ とした。この公式を用いて、荷電粒子が $\mathbf{r}$ に作るスカラー・ポテンシャル $\phi_\omega(\mathbf{r})$ とベクトル・ポテンシャル $\mathbf{A}_\omega(\mathbf{r})$ を計算すると、$\mathbf{r}$ への依存性は全て次の様な積分因子にまとめられる：

$$I_\omega(b,z) = \int dz'\frac{e^{iS_\omega(b,z,z')}}{\sqrt{b^2+(z-z')^2}}, \qquad b = \sqrt{x^2+y^2}\ .$$

位相因子 $S_\omega(b,z,z')$ の表式を求めよ。

(6) $z - z' = bu$ とおくと、下図の様に、u は z 軸と $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ のなす角度 θ と $u = \cot\theta$ という関係にある。前問 (5) で求めた位相因子が u の関数としてある実数 u_0 で停留値をとる条件を求めよ。この条件はチェレンコフ光の発生する幾何学的条件を与える。この条件が成り立つための、c_m と v の関係を求めよ。

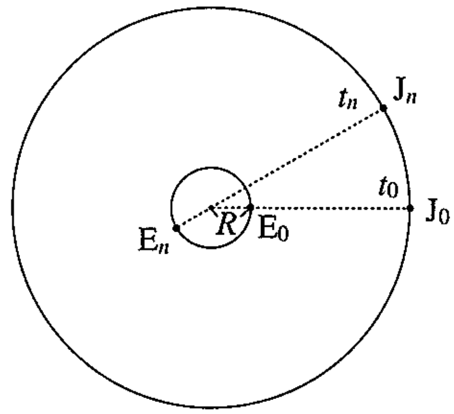


(7) 最後に、kb が大きい遠方でのポテンシャルの振る舞いを考える。位相因子 $S_\omega(b,z,z')$ を前問 (6) で求めた停留値の周りで $u' = u - u_0$ で展開して u' について 2 次までの項で近似して積分を実行し、b が大きいところで $I_\omega(b,z)$ がどのように振舞うか示せ。

第５問　物理学（４）（その１）

I. 真空中の光速度 $c = 2.997\,924\,58 \times 10^8\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ は、1983 年に長さの標準 (1 m) を定める定義値となったため、「光速度測定」は研究の対象ではなくなったが、それまではガリレオをはじめとした多くの研究者が光速度測定に挑戦してきた。
例えばレーマーは、1671～77 年にかけて木星の第一衛星イオの食(木星の陰に隠れて見えなくなること。約 42 時間毎に起こる)を利用して光速度測定を試みた。

右図はレーマーの光速度測定の原理を単純化したものであり、地球が E_0、木星が J_0 の位置にある時刻 t_0 にイオの食が観測されたとする。そしてこれ以降の食の起こる時刻を、1 回目 t_1、2 回目 t_2、…、とし、n 回目の食(時刻 t_n)は、地球が E_n、木星が J_n の位置関係にあるときに観測されたとする。ただし、太陽はこの観測を妨げないものとする。
衛星や惑星は、その親星(木星や太陽など)の周りを等速円運動するものとし、それらの公転面は同一平面内にあるものとする。イオの会合周期(太陽、木星、イオの順で一直線上に並んでから次に同じ順序で直線上に並ぶまでの時間)を T、地球と太陽との距離を R として、以下の設問に答えよ。



(1) 光速度 c を t_0、t_n、n、T、R を用いて表せ。

前問(1)の方法で光速度を決めるには、地球と太陽との距離 R を測る必要がある。三角測量では、月や地球のそばを通過する彗星までの距離は測定可能だが、太陽までの距離 R は遠すぎて測定できない。しかし、月あるいは彗星までの距離から、太陽までの距離 R を見積もる方法は 17 世紀にもあった。

(2) 地球から月(あるいは彗星)までの距離測定から、太陽までの距離 R を見積もる方法を考案せよ。
(注：この設問は諸君らの科学史的な知識を問うているのではない。各自がもっている物理学的な知識と知恵を働かせて、「こうすれば可能なはずだ」というアイディアを出して欲しい。採点はその現実味の高さによって行う。もちろん史実を知っているならばそれを解答しても良い。)

レーマー以降、フィゾー、フーコー、マイケルソン、イーブンソンらの努力により、真空中の光速度はより精密に測定され、1983 年に上記のように 1 m を定義する基準となった。現在では、レーザーやレーダーを使い、電磁波(光)が月や金星までを往復するのにかかる時間を測定して月や金星までの距離を見積もっている。しかしこの方法も太陽までの距離測定には利用できない。通常は、金星が地球に最接近した時の距離 L を測定し、ケプラーの第三法則を使って地球から太陽までの距離 R を見積もっている。

(3) なぜレーザーやレーダーでは太陽までの距離を直接測定できないのか。理由を考察せよ。

(4) 地球と金星の公転周期をそれぞれ T_{E}、T_{V} として、地球から太陽までの距離 R を、T_{E}、T_{V}、L を使って表す方法を示せ。なお、R を明示的に表現する必要はない。「この方程式を解けば求まるはずだ」という指針(方程式)を示すだけで良い。

(次ページに続く)

第５問　物理学（４）（その２）

(前ページからの続き)

II. 地表から月面までの距離は、アポロ 11 号などが月面に設置したコーナーキューブ鏡を利用してレーザーを使って測定できる。コーナーキューブ鏡とは、立方体(cube)の頂点付近の内面(corner)を反射鏡にしたものであり、具体的には 3 枚の平面鏡をそれぞれの平面が直交するように貼り合わせたものである。コーナーキューブ鏡に入射した光は、入射方向とは正反対の方向に必ず反射されるため、遠方に設置しても反射光は必ず送信者のもとに戻ってくる。

(1) $\mathbf{k}$ 方向に進む光がコーナーキューブ鏡で反射されたとき、反射光は $-\mathbf{k}$ 方向に進むことを幾何光学的に示せ。

前問(1)では、幾何光学的な考察で反射光は全て必ず送信者の元に届くとしたが、実際にはレーザー光は回折により広がっていくので、地表から送信したレーザー光のうち、月面にあるコーナーキューブ鏡で反射され再び地表の送信者のもとに届く割合は非常に小さい。

(2) 半径 a の平行ビームにしたレーザー光(波長 λ、強度 I_0)を、地表から月面に設置したコーナーキューブ鏡(反射可能領域の半径 d)に向けて照射し、反射光を地表の同じ地点に設置した半径 D のパラボラ鏡で光検出器に集光する。地表と月面との距離を R_M とするとき、光検出器に到達する光強度 I を I_0、λ、a、d、D、R_M を使って近似的に表せ。なお、伝播中の吸収や散乱による損失は考えなくてよい。また、鏡の反射率は 100%とする。

(3) 前問(2)で、$\lambda = 1.0\,\mu\mathrm{m}$、$a = 0.50\,\mathrm{m}$、$d = 0.30\,\mathrm{m}$、$D = 5.0\,\mathrm{m}$、$R_M = 3.8\times10^8\,\mathrm{m}$ としたとき、I/I_0 を求めよ。有効数字は 1 桁で良い。

III. 一般に検出器の出力は必ず雑音を伴うが、この雑音に埋もれてしまうような微弱な信号を高感度で弁別する方法に変調測定法がある。前問 II. の光検出を例にとると、送信するレーザー光の強度あるいは位相を周波数 f で変調し、パラボラ鏡で集めた光を検出した出力のうち、変調周波数 f と同じ周波数成分だけを選択的に位相敏感検波・増幅する方法である。送信するレーザー光強度を周波数 f で正弦波的に 100%変調すると、コーナーキューブ鏡で反射されて戻ってくる光も同様に変調されているはずなので、信号は $V(t) = V_0 \sin ft$ と期待される。いま、局所発振器(周波数 f、位相 ϕ)の出力電圧 $U(t) = U_0 \sin(ft + \phi)$ と $V(t)$ との積をとり、低域透過フィルター回路で高周波成分を取り除くと、位相 ϕ だけに依存する出力信号 W が得られる。位相敏感検波・増幅と呼ばれる理由である。

(1) 出力 W を U_0、V_0、および位相 ϕ で表せ。

(2) キャパシター C および抵抗 r を用いた低域透過フィルター回路の例を示し、そのカットオフ周波数 f_C を求めよ。

(3) 変調を加えて位相敏感検波・増幅する方法が高感度測定を実現できる要点を述べよ。設問(1)の結果を参考にしても良い。

平成 25 年度修士課程入学試験問題
相関基礎科学系　　専門科目

第６問　化学（１）

問 I および II に答えよ．解答に至る過程も記せ．

I. 気相のメチルイソシアニドの異性化反応

$$CH_3NC \longrightarrow CH_3CN \qquad (1)$$

に関する下の問に答えよ．ただし，気体定数 $R = 8.31\ \mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}$，$\log_{10}e = 0.434$，$\ln 2 = 0.693$ とせよ．

(1) 反応(1)は 1 次反応であり，温度 500 K における反応速度定数は $k = 5.0\times10^{-4}\ \mathrm{s^{-1}}$である．500 K におけるこの反応の半減期を求めよ．

(2) 反応速度定数 k〔$\mathrm{s^{-1}}$〕の温度 T〔K〕に対する依存性は

$$\log_{10} k = 13.3 - 8.3\times10^3\times(1/T)$$

と表される．反応の活性化エネルギー〔$\mathrm{kJ\,mol^{-1}}$〕の値を求めよ．

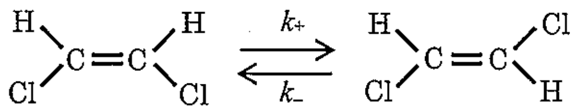
(3) 下表の標準生成エンタルピー$\Delta_f H^\circ$の値を用いて反応(1)の標準反応エンタルピー$\Delta_r H^\circ$を求め，発熱反応か吸熱反応かを答えよ．

	$\Delta_f H^\circ$〔$\mathrm{kJ\,mol^{-1}}$〕
$CH_3NC(g)$	+163.5
$CH_3CN(g)$	+74.0

(4) 標準状態における反応(1)に対して，反応物 1 mol 当たりの内部エネルギー変化を$\Delta_r E^\circ$とする．このとき，$\Delta_r E^\circ = \Delta_r H^\circ$ であることを示せ．ただし，気体はすべて理想気体とする．

(5) 逆反応 $CH_3CN \rightarrow CH_3NC$ の活性化エネルギーを求めよ．ただし，$\Delta_r H^\circ$の温度依存性は無視せよ．

II.　1,2-ジクロロエチレンのシス体からトランス体への異性化反応



は可逆反応であり，正反応も逆反応も 1 次反応である．

温度 1200 K の気相で濃度 $[\mathrm{cis}]_0 = 1.0\times10^{-3}\ \mathrm{mol\,L^{-1}}$ のシス体から出発して異性化反応を開始し，トランス体の濃度 [trans] の時間変化を測定した．反応を開始してから t 秒後の [trans] は

$$[\mathrm{trans}] = A\,\{1 - \exp(-Bt)\}$$

と表すことができ，定数 A および B の値はそれぞれ，$A = 4.8\times10^{-4}\ \mathrm{mol\,L^{-1}}$，$B = 9.0\times10^{2}\ \mathrm{s^{-1}}$ であった．下の問に答えよ．

(1) トランス体の生成速度vを，正反応の反応速度定数 k_+，逆反応の反応速度定数 k_-，$[\mathrm{cis}]_0$，[trans] で表せ．

(2) 定数 A を k_+，k_-，$[\mathrm{cis}]_0$ で表せ．

(3) 定数 B を k_+ および k_- で表せ．

(4) 反応速度定数 k_+の値を求めよ．

平成 25 年度修士課程入学試験問題

相関基礎科学系　　専門科目

第７問　化学（２）その１

以下の問(1)〜(12)に答えよ．必要であれば下に示す周期表を用いよ．

族番号	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
元素	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn

分光化学系列は低スピン型$[Co(NH_3)_5X]^{n+}$錯体の d–d 遷移の吸収波長をもとに，配位子 X の配位子場の強さを表したものである．表 1 に各$[Co(NH_3)_5X]^{n+}$錯体の吸収波長とモル吸光係数を示す．$[Co(NH_3)_5X]^{n+}$錯体は X が NH_3 以外は厳密な正八面体型ではないが，ここでは正八面体型錯体と仮定する．

表 1. $[Co(NH_3)_5X]^{n+}$錯体の d-d 遷移に基づく吸収波長(λ / nm)とモル吸光係数の対数(log ε)

$[Co(NH_3)_5X]^{n+}$	λ / nm	log ε
$[Co(NH_3)_6]^{3+}$	476.6	1.68
$[Co(NH_3)_5(H_2O)]^{3+}$	486.7	1.62
$[Co(NH_3)_5(OH)]^{2+}$	503.0	1.80
$[Co(NH_3)_5F]^{2+}$	513.3	1.70
$[Co(NH_3)_5Cl]^{2+}$	533.4	1.71
$[Co(NH_3)_5Br]^{2+}$	548.0	1.77
$[Co(NH_3)_5I]^{2+}$	578.7	1.90

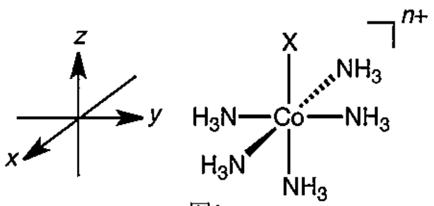


図1

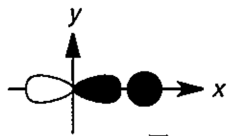


図2

(1) $[Co(NH_3)_5(OH)]^{2+}$錯体の d 電子数を求めよ．

(2) 正八面体型錯体では 5 つの d 軌道は三重縮重の t_{2g} 軌道と二重縮重の e_g 軌道に分裂する．この理由について，結晶場理論から説明せよ．

(3) 低スピン型$[Co(NH_3)_5(H_2O)]^{3+}$錯体の基底状態における d 電子の電子配置を$(t_{2g})^m(e_g)^n$という表記で示せ．

(4) 1 電子励起状態における$[Co(NH_3)_5(H_2O)]^{3+}$錯体の電子配置を問(3)と同様に示せ．

(5) 表 1 の配位子 X を配位子場の弱い順に左から並べよ．

(6) X がハロゲンの場合，Co−ハロゲン間の配位結合には σ 性の相互作用に加え π 性の相互作用が関わる．ここで$[Co(NH_3)_5X]^{n+}$錯体を図 1 に示す座標で考え，σ 性および π 性の分子軌道のうち d 軌道の寄与が大きい分子軌道の概略図を，図 2 を参考に全て示せ．ある軸方向から見た図として分かりやすく描け．

(7) 問(6)の π 性の相互作用が加わることで$[Co(NH_3)_5X]^{n+}$錯体の d 軌道の寄与の大きな分子軌道のエネルギーにどのような変化が起こるか，エネルギー準位図を用い簡潔に説明せよ．

(8) 問(6)の π 性の相互作用が$[Co(NH_3)_5X]^{n+}$錯体の吸収波長に及ぼす変化を述べよ．

(9) $[Co(NH_3)_5X]^{2+}$ (X: F, Cl, Br, I)錯体間における吸収波長の違いについて，問(7)のエネルギー準位図をもとに簡潔に説明せよ．

(10) $[CoF_6]^{3-}$錯体は常磁性であることが知られている．その理由を簡潔に説明せよ．

第７問　化学（２）その２

(11) $[Co(NH_3)_5(H_2O)]^{3+}$錯体と$[Co(NH_3)_6]^{3+}$錯体における吸収波長の違いは配位元素である窒素と酸素の間に見られる一般的な傾向であり，金属イオンと配位子との σ 性の結合の強さに由来する．このことを踏まえて，両錯体間における吸収波長の違いを簡潔に説明せよ．

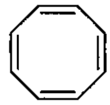
(12) 過マンガン酸カリウム($KMnO_4$)水溶液は濃い赤紫色で log εは約 4 である．以下の問(a), (b)に答えよ．

(a) $KMnO_4$における Mn の d 電子数を求めよ．

(b) 問(a)の結果を踏まえて$KMnO_4$と$[Co(NH_3)_5X]^{n+}$錯体の間に見られるモル吸光係数の違いを簡潔に説明せよ．

第８問　化学（３）その１

以下の問I, IIに答えよ.



COT

I. 1,3,5,7-シクロオクタテトラエン(COT)は，ベンゼンとは異なり，浴槽形とよばれる非平面形（図 1）の立体配座をとり，芳香族としての性質を示さない．COT の構造と性質について，以下の問に答えよ．

(1) COT が平面正八角形をとると仮定した場合，C-C-C の結合角は何度か．

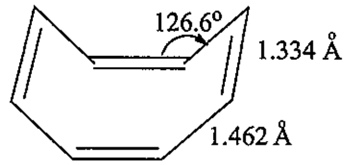
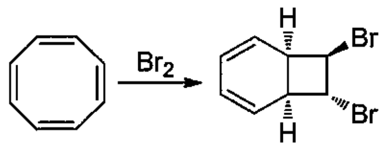


図 1．COT の浴槽形配座

(2) COT が平面正八角形をとると仮定した場合について，π電子系のエネルギー準位図と一部のヒュッケル分子軌道の概形（原子軌道係数の符号と大きさ）とを図 2 に示した．表示されていない分子軌道ψ_2, ψ_4, ψ_6, ψ_8の概形を図示せよ．また，図 3 にならって，COT のπ電子系の基底状態の電子配置を示せ．

(3) (1)-(2)の結果に言及しながら，COT が非平面形配座をとる要因について述べよ．

(4) COT がクロロホルム中で等モルの臭素と反応すると，付加体(**1**)とその鏡像異性体が得られた．この反応はどのような機構で進行したと考えられるか，中間体の構造式を示しながら説明せよ．



1

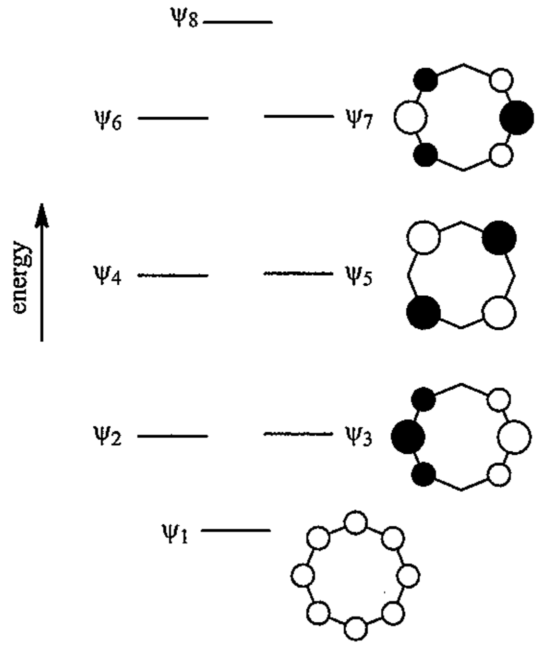
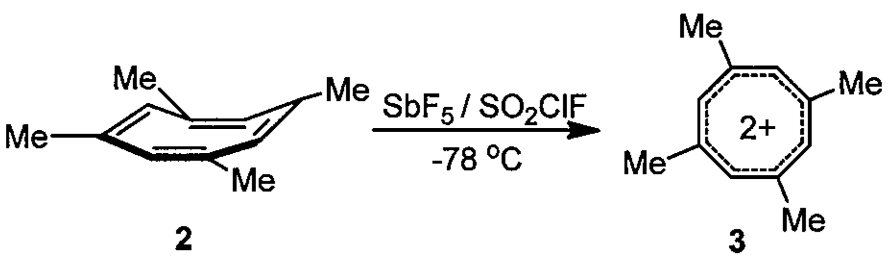


図 2．平面正八角形の COT のπ電子系のエネルギー準位図とヒュッケル分子軌道

(5) 付加体(**1**)と鏡像異性体の構造式を書き，両者のすべての不斉炭素について立体配置を*RS*表示法で示せ．

(6) 1,3,5,7-テトラメチルCOT(**2**)に低温(−78 °C)で強力な酸化剤(SbF_5/SO_2ClF)を作用させると，二価陽イオン(**3**)が生成し，これが平面八角形をとることが示されている．COTが電子を2個失うと平面正八角形に変化する要因について述べよ．



2　**3**

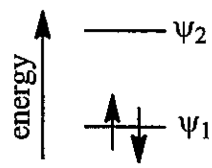
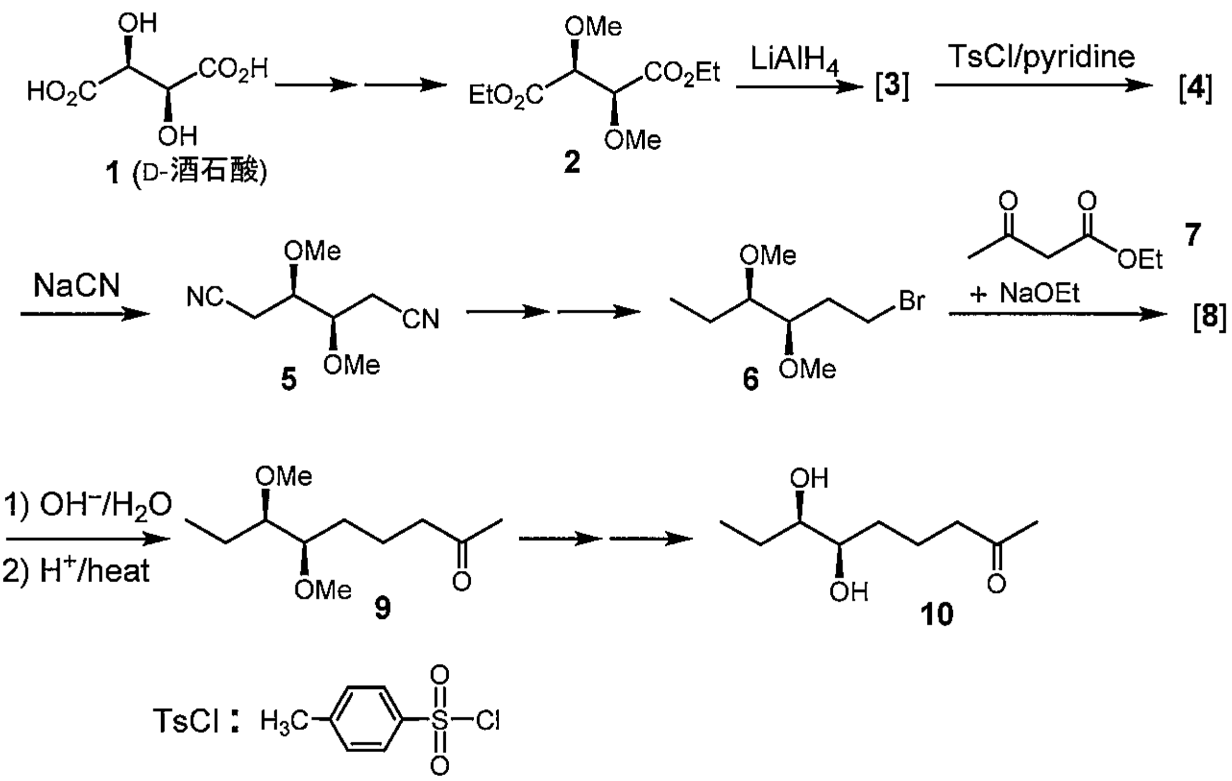


図 3．エチレンのπ電子系の基底状態の電子配置

第８問　化学（３）その２

II.　光学活性な酒石酸 **1** を原料にして，光学活性なジオール化合物 **10** を合成する反応経路が下に示されている．以下の問に答えよ．なお，構造式はすべて立体配置がわかるように書くこと．



(1)　化合物 **3** の構造式を書け．また **3** が生成する反応機構を示せ．

(2)　化合物 **4** の構造式を書け．

(3)　化合物 **3** から **5** を合成するのに，**4** を中間に経由しなければならない理由は何か．

(4)　化合物 **6** と **7** の反応によってできる **8** の構造式を書け．またその反応機構を示せ．

(5)　化合物 **8** をアルカリ水処理した後，酸性にして加熱すると **9** が生成する．その反応機構を示せ．

平成 25 年度修士課程入学試験問題
相関基礎科学系　　専門科目

第９問　化学（４）その１

分子の構造と性質に関する以下の問Ⅰ～Ⅲすべてに答えよ．

Ⅰ. 熱平衡にある分子集団の熱力学的振る舞いは，分子分配関数を考えることで記述できる．温度 T で熱平衡にある分子集団の個々の分子の量子化されたエネルギー準位をε_j ($j = 0, 1, \ldots$) とすると，分子分配関数 q は，

$$q \equiv \sum_{j=0}^{\infty} g_j e^{-\beta\varepsilon_j}$$

で与えられる．ただし，$\varepsilon_0 = 0$ ととる．ここで，g_j は準位の縮重度であり，$\beta = 1/(k_B T)$，$k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J K^{-1}（ボルツマン定数）である．

２原子分子の回転，振動と分配関数の関係を CO を例に考える．次の問(1)～(6)に答えよ．なお，CO 分子では，回転定数が $B = 1.93$ cm^{-1}，振動数が$\omega = 2370$ cm^{-1} と知られている．また，プランク定数は $h = 6.6 \times 10^{-34}$ J s，真空中の光速度は $c = 3.0 \times 10^8$ m s^{-1} (3.0×10^{10} cm s^{-1})である．

(1) 低温の場合を除いて，２原子分子の回転の分配関数 q^R は

$$q^R = \frac{1}{\beta hcB}$$

と近似することができる．この近似を用いることのできる条件とはどのようなものか，二つの量を比較する式の形で書け．また，300 K の CO でこの条件が成立しているか，数値で示せ．ただし，２原子分子の回転エネルギーは，

$$E_R = hcBJ(J+1) \qquad J = 0, 1, 2, \ldots$$

である．

(2) 一般にある運動の自由度 X に関する分子分配関数が q^X と与えられているとき，その運動の自由度の１分子あたりの平均エネルギー $<\varepsilon^X>$ は，

$$<\varepsilon^X> = -\frac{1}{q^X}\frac{\partial q^X}{\partial \beta}$$

で与えられる．問(1)の近似式を用いたときの２原子分子の回転の平均エネルギーを求めよ．

(3) ２原子分子の回転運動に関し，エネルギー等分配則について説明せよ．

(4) ２原子分子の振動のエネルギー準位を，振動の量子数を v として，式で示せ．

(5) 振動の分配関数 q^V を与える式を書け．

(6) 温度300 Kで，振動運動に関するエネルギー等分配則が成立しているかどうかについて説明せよ．

Ⅱ. 二重結合と単結合が交互に連なって存在するとき，二重結合が共役しているという．共役二重結合をもつ化合物に関する次の問(1)，(2)に答えよ．

(1) 1,3,5−ヘキサトリエン CH_2=CH−CH=CH−CH=CH_2 について，ヒュッケル法を用いて π 分子軌道のエネルギーE を求めたところ，以下の結果を得た．ただし，クーロン積分をα，共鳴積分をβとして $E = \alpha + \lambda\beta$の形で得られる軌道エネルギーの$\lambda$の値だけが記されている．なお，$\alpha < 0$, $\beta < 0$ である．

$$\lambda = 1.80,\quad 1.25,\quad 0.45,\quad -0.45,\quad -1.25,\quad -1.80$$

第９問　化学（４）その２

(a) 1,3,5–ヘキサトリエンの全π電子エネルギーE_πをαとβを用いて表せ.

(b) 1,3,5–ヘキサトリエンを 3 個のエチレン $CH_2{=}CH_2$ とみなした場合の全π電子エネルギー $E_\pi{}^L$ をαとβを用いて表せ. なお, ヒュッケル法によって求めたエチレンのπ分子軌道のエネルギーは, $\alpha+\beta$, および$\alpha-\beta$である.

(c) E_π と $E_\pi{}^L$ を比較せよ. 同じ場合には同じと記せ. 差がある場合にはどちらが小さいかを示し, その差は何に由来するかを説明せよ.

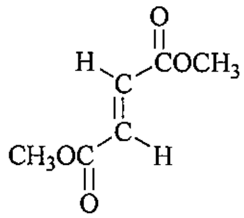
(2) 1,3–ブタジエン $CH_2{=}CH{-}CH{=}CH_2$ はアルケンの典型的な反応を起こすだけではなく, 共役二重結合に特有の反応性を示す.

(a) 1,3–ブタジエンに等モルの塩化水素 HCl を反応させると, 通常のアルケンに見られるような付加反応生成物 **A** のほかに, その異性体 **B** も生成する.

$$CH_2{=}CH{-}CH{=}CH_2 \;+\; HCl \longrightarrow \underset{\textbf{A}}{CH_3{-}\overset{\displaystyle Cl}{\overset{|}{C}}H{-}CH{=}CH_2} \;+\; \underset{\textbf{B}}{CH_3{-}CH{=}CH{-}CH_2Cl}$$

1,3–ブタジエンと HCl との反応において, ２種類の付加反応生成物 **A** と **B** が生成する機構を説明せよ.

(b) 1,3–ブタジエンとフマル酸ジメチル(**C**)を加熱すると, 主生成物として環状構造をもつ化合物 **D** が得られる. **D** の構造を立体構造がわかるように記し, **D** が生成する機構を説明せよ.



C

Ⅲ. 同じ原子を含む化学種を酸化数の順に並べ, 各化学種を結ぶ矢印の上に標準電位（単位 V）を示した図をラティマー図と呼ぶ. 図１に酸性溶液中の酸素及びマンガンのラティマー図を示す. 以下の問(1)~(5)に答えよ. 計算に必要であれば, ファラデー定数 $F = 9.65\times10^4\ \mathrm{J\ V^{-1}\ mol^{-1}}$ （$1\ \mathrm{J\ V^{-1}} = 1\ \mathrm{C}$）を用いよ.

$$\overset{0}{O_2} \xrightarrow{+0.68\ \mathrm{V}} \overset{-1}{H_2O_2} \xrightarrow{+1.78\ \mathrm{V}} \overset{-2}{H_2O}$$

$$\overset{+7}{MnO_4^-} \xrightarrow{+1.69\ \mathrm{V}} \overset{+4}{MnO_2} \xrightarrow{+0.95\ \mathrm{V}} \overset{+3}{Mn^{3+}} \xrightarrow{+1.51\ \mathrm{V}} \overset{+2}{Mn^{2+}} \xrightarrow{-1.18\ \mathrm{V}} \overset{0}{Mn}$$

図1. 酸性溶液中の酸素及びマンガンのラティマー図

(1) H_2O_2 の酸化及び還元の反応式を示せ. また, それぞれの反応式の標準電位を求めよ.

(2) MnO_2 の Mn^{2+}への還元の反応式を示し, その標準電位を求めよ.

(3) H_2O_2 に MnO_2 を加えると O_2 と H_2O が得られる. この反応において, H_2O_2 は, (i) MnO_2 を Mn^{2+}に還元し, かつ, (ii) Mn^{2+}を MnO_2 に酸化している. (i), (ii)の反応式を示せ. また, それぞれの反応の標準電位を求めよ.

(4) H_2O_2 から O_2 と H_2O が生成する反応式を示し, その標準電位を求めよ.

(5) (4)の反応式に MnO_2 は現れない. この反応における MnO_2 の役割は何か.

平成 25 年度修士課程入学試験問題
相関基礎科学系　　専門科目

第 10 問　生物学　（その１）

以下の文を読み、問１－８に答えよ。

合成されたタンパク質は折りたたまれ、立体的な構造をとって機能をもつことが知られている。この立体的な構造のことを（　１　）という。タンパク質は、主鎖が（　２　）巻きらせんであるαヘリックスやひだのようなβシート構造をとり、それが側鎖の極性や電荷などによって折りたたまれて、一定の空間配置をとる。ポリペプチドの一部が球状の塊をつくることがあり、その塊がいくつかくっついて一定の形をとることが知られており、その１つの塊のことを（　３　）という。

図１Aは（　３　）が１つしかないタンパク質 H-Ras と DHFR（ジヒドロ葉酸レダクターゼ）を人工的にリンカーペプチドでつないだ融合タンパク質の構造を示す。H-Ras と DHFR の間には、SGGSGGSGGSG（S、G はそれぞれセリン、グリシンというアミノ酸を表す）という 11 個のアミノ酸からなるリンカーを挿入してある。この融合タンパク質をコードした遺伝子を大腸菌に導入して過剰発現させ、次の日に、不溶性になった融合タンパク質を 8M尿素で可溶化した後に His タグを利用して精製した。また H-Ras と DHFR は、同様に単独でもタンパク質を大腸菌に発現させ、8M尿素を用いて可溶化後、単一に精製した。

次に、これらの精製タンパク質を中性溶液に希釈し、時間経過を追って H-Ras と DHFR の活性を測定したのが図１Bである。図１Aの人工融合タンパク質を希釈した場合には、H-Ras も DHFR も活性の戻りは遅かった。しかし、単独で精製した H-Ras と DHFR を等量混ぜて希釈した場合には、H-Ras も DHFR も活性の戻りは融合タンパク質にくらべて速かった。

問１　（　１　）－（　３　）に最も適切な言葉を入れよ。

問２　リンカーはなぜセリンやグリシンが多いものを使ったか。理由を二次構造と関連づけて説明せよ。

問３　図１Bで、H-Ras と DHFR を混ぜても各々単独の場合と比べて活性の戻りが同じであった。この実験で明らかになった H-Ras と DHFR 両タンパク質の関係は何か。

問４　融合タンパク質も時間をかければ H-Ras と DHFR の活性が戻ることが分かった。このことから明らかになった H-Ras と DHFR の関係について分かることを述べよ。

問５　His タグをもつタンパク質を精製することができる原理を簡単に説明せよ。

問６　8M尿素を用いると不溶性になったタンパク質をなぜ可溶化できるのか。

問７　活性が戻った融合タンパク質を少量のプロテイナーゼK(PK)で処理するとリンカーが切断され、正常な機能を持つ H-Ras と DHFR がつくられることがわかった。そこで、この融合タンパク質を網状赤血球または大腸菌のライセートで発現させ、時間とともに一定量のタンパク質をとり、適量の PK 処理を行った（発現が短時間のため、タンパク質は可溶性になっている）。そのときのウエスタンブロットの模式図が図２A及び図２Bである。図２Aと図２Bどちらが網状赤血球の場合か、また、その根拠を５行程度で述べよ。

問８　H-Ras の変異は、がんを引き起こすと言われている。このタンパク質のシグナル伝達における正常機能について知るところを３行程度で記せ。

（次のページに続く）

第 10 問　生物学　（その２）

図1A

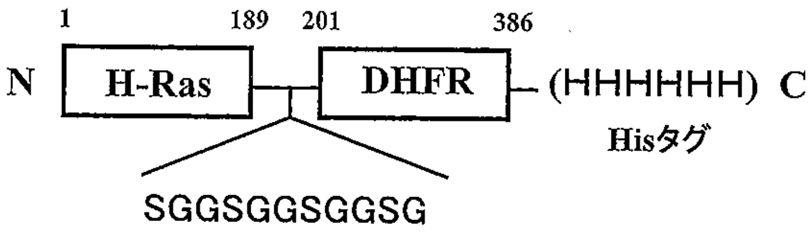


図1B

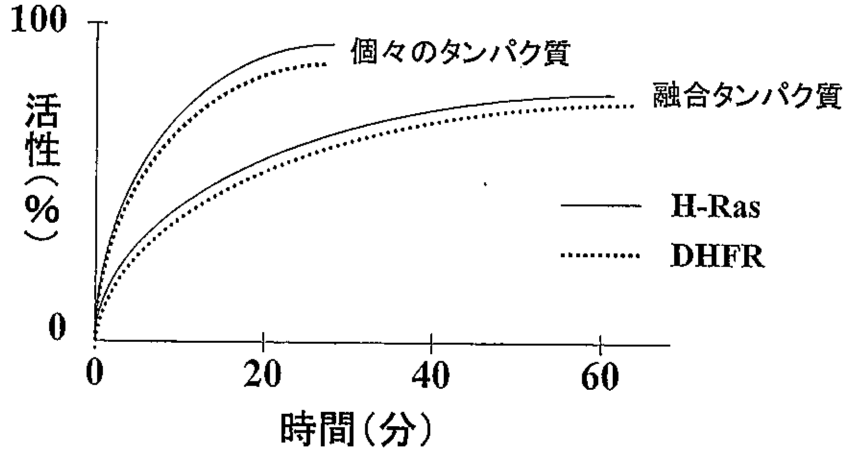


図2A

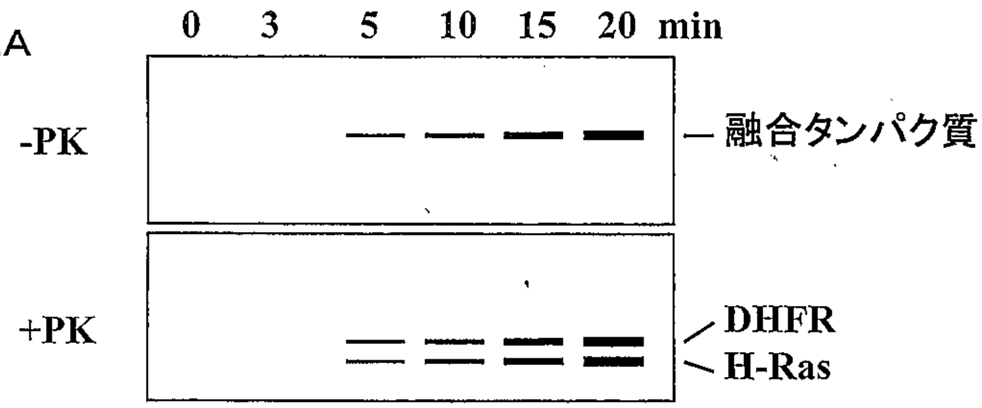
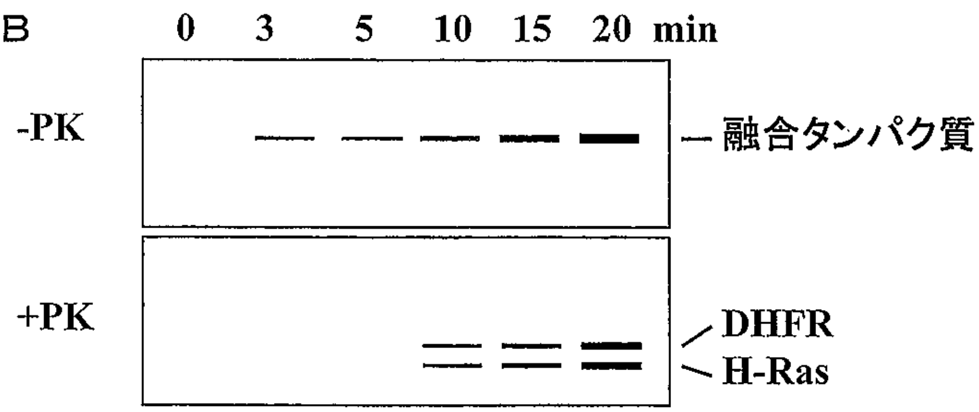


図2B



第11問　科学史・科学哲学（1）

次のA・Bのうち、一題を選び、答えよ。複数解答した場合は、すべて無効とする。選択した問題の記号は解答冒頭に明記すること。

A 現象と実在の関係について自由に論ぜよ。

B 環境倫理における文化依存性について自由に論ぜよ。

平成 25 年度修士課程入学試験問題

相関基礎科学系　　専門科目

第 12 問　科学史・科学哲学（2）

次のA・Bのうち、一題を選び、答えよ。複数解答した場合は、すべて無効とする。選択した問題の記号は解答冒頭に明記すること。

A エックス線や放射能の発見以降の原子科学の発展と、その各分野における応用、および応用に伴う倫理的問題について、歴史的に論ぜよ。

B 心と脳はどのような関係にあるだろうか。心身問題について代表的な説をいくつか挙げながら、心と脳の関係について論ぜよ。

第 13 問　科学史・科学哲学（3）

次のA・Bのうち、一題を選び、答えよ。複数解答した場合は、すべて無効とする。選択した問題の記号は解答冒頭に明記すること。

A 科学研究とそれを進める組織や制度との間にはどのような関係があるだろうか。複数の事例を取り上げつつ、その関係について論ぜよ。

B 科学は 19 世紀に飛躍的に発展したと言われる。学問内容と研究制度の両面から、その発展の概要について論ぜよ。

第14問　科学史・科学哲学（4）

以下のAからOまでの十五の言葉から四つを選択し、科学史的、哲学的、ないし科学技術論的観点から説明せよ。五つ以上解答した場合は、すべて無効とする。選択した問題の記号はその解答の冒頭に明記すること。

A　Alexis Carrel
B　ベイズ主義
C　James Chadwick
D　社会構成主義（social constructivism）
E　disability
F　実験哲学
G　斉一説
H　カイザー・ヴィルヘルム研究所
I　メタアナリシス
J　メタ認知
K　チューリングテスト
L　正常な事故（normal accident）
M　『暦象考成』
N　*DSM*（*Diagnostic and Statistical Manual of Mental Disorders*）
O　自然な存在論的態度（Natural Ontological Attitude）

草 稿 用 紙

草 稿 用 紙

草 稿 用 紙